http://hermes.ucs.br/ccet/deme/emsoares/inipes/complexos/

APLICAÇÕES DE NÚMEROS COMPLEXOS

Silvia Carla Menti Propicio
Universidade de Caxias do Sul
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática e Estatística
Licenciatura Plena em Matemática

Resumo: Há muito tempo, em nossos currículos de ensino médio, trabalhamos com números complexos. Muitas vezes, passamos a nossos alunos a idéia de que a unidade imaginária *i*, serve apenas para extrair uma raiz negativa e não proporcionamos a eles a oportunidade de perceber o quão importante o conjunto dos números complexos é em suas aplicações. Com este artigo, tenho o objetivo de apresentar, de uma forma simples, como podemos fazer com que o aluno compreenda em que universo é aplicada a tão sugestiva unidade imaginária *i*.
Palavras-chave: números complexos, aplicação de números complexos, números complexos na física, números complexos no ensino médio.

Números Complexos e a Física

Há mais de 200 anos, a física e a matemática estão intimamente ligadas no que diz respeito a conjuntos numéricos.

Embora não haja um estudo mais aprofundado, já se sabe que atualmente, na física contemporânea, a aplicação do conjunto dos números complexos é tão grande, que é até possível pensar em uma autêntica " complejificación de la física", como cita o autor Frederico de Rubio y Galy em "The Role of Mathematics in the Rise of Science".

Nesta mesma obra, Dr Frederico dá aos números complexos a idéia de par ordenado: "um par ordenado de números reais, onde suas coordenadas representam a parte real e imaginária do complexo". Assim, apresenta como os números complexos podem multiplicar-se e como é simples a sua representação como vetor.

Fica claro então, como o universo de complexos se expande no mundo da física, onde é utilizado pelos físicos contemporâneos de forma familiar em diversas teorias. Vejamos alguns exemplos.

Vetores e Quantidades Complexas

Dado um número complexo determinado por (a,b), onde a e b são números reais, podemos facilmente representá-lo em um plano. Tomando como base a localização de pares ordenados, localizamos o par (a,b) e formamos o vetor com origem em (0,0) e extremidade em (a,b).

Para facilitar essa representação, vamos utilizar uma nova quantidade que chamaremos de operador *i*, embora alguns autores também o denominam operador j. Observemos a figura:

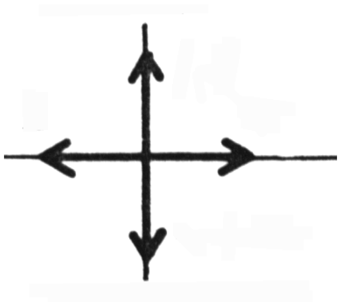

Figura I

O vetor H, representado sobre o eixo de referência, à direita do eixo vertical está sofrendo uma rotação. Ao se deslocar para a esquerda do eixo vertical, temos o vetor –H , que é o próprio vetor H multiplicado por –1. Então, se para fazer com que o vetor gire 180° é necessário multiplicá-lo por –1, para que sua rotação seja de 90° (e o vetor se localize sobre o eixo vertical) é necessário multiplicá-lo por $\sqrt{-1}$, pois $\sqrt{-1}$. $\sqrt{-1}$ = -1.

A expressão $\sqrt{-1}$ não é aceita como número real e é então simbolizada pela letra i. Assim, qualquer vetor multiplicado por i, sofre uma rotação de 90° .

Portanto, na figura anterior temos:

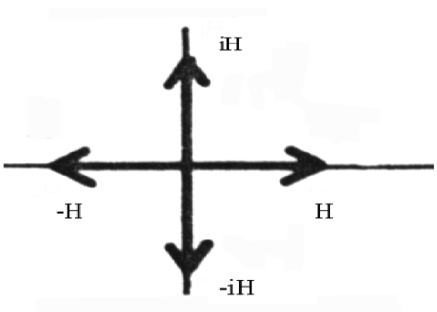

Figura II

Esta representação onde o vetor acompanhado de +i está no eixo vertical para cima e acompanhado de –i está no eixo vertical para baixo é chamada forma complexa.

Números complexos e circuitos monofásicos

No estudo de circuitos, a aplicação de números complexos aparece na forma de vetores, que determinam algumas equações importantes, com a presença da unidade imaginária.

Um circuito monofásico é alimentado por uma única tensão alternada. Quando a única dificuldade que a tensão sofre é a resistência efetiva, o circuito é dito puramente resistivo. Nesse circuito, a tensão Er e a intensidade de corrente I atingem valores correspondentes ao mesmo tempo, o que faz com que os seus vetores representativos fiquem sobre o eixo de referência. Dizemos então que as grandezas estão em fase.

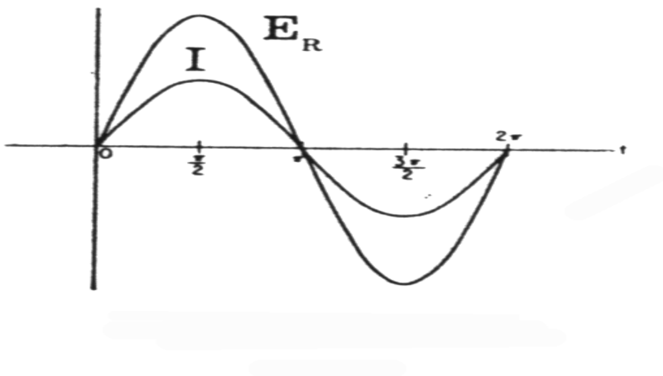

Figura III

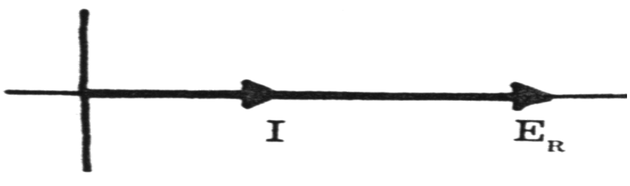

Figura IV

Quando a dificuldade que a corrente sofre é a reatância capacitiva, o circuito é chamado puramente capacitivo. Nesse circuito, Ec e I não atingem valores correspondentes ao mesmo tempo, de modo que os vetores que as representam fiquem um sobre cada eixo. Neste caso, dizemos que Ec e I estão defasadas 90° (I se antecipa aos valores de Ec).

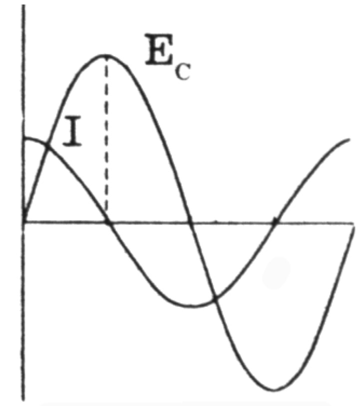

Figura V

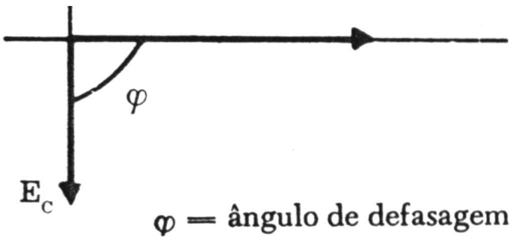

Figura VI

Quando o circuito apresenta como dificuldade à reatância indutiva, o circuito é chamado de puramente indutivo. Nesse circuito Ei e I também estão defasadas 90° (I está atrasada aos valores de Ei).

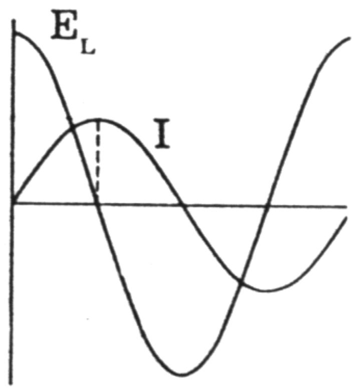

Figura VII

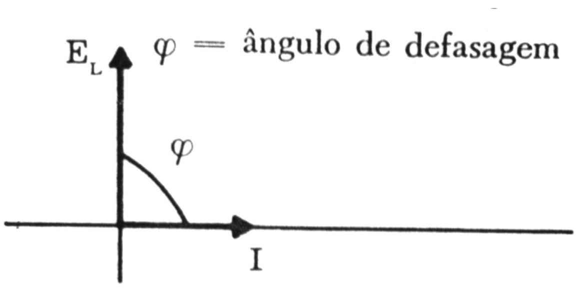

Figura VIII

Circuito em fase tipo R –C

R e C simbolizam a resistência e a capacitância equivalente. Nesse circuito, a dificuldade encontrada pela fonte para estabelecer uma corrente no circuito é determinada pela soma vetorial de R e X_c.A tensão E é a soma vetorial das componentes Er e Ec.

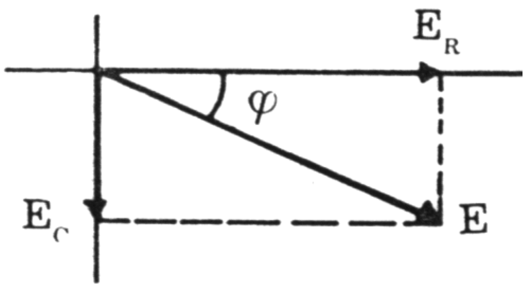

Figura IX

Observa-se que o ângulo de defasagem é menor que 90° , assim, podemos representar o vetor E na forma trigonométrica, onde E = E cos θ - i sen θ ou na forma binômia E = Er – i Ec.

Circuito em série tipo R – L – C

Neste tipo de circuito três situações podem ocorrer:

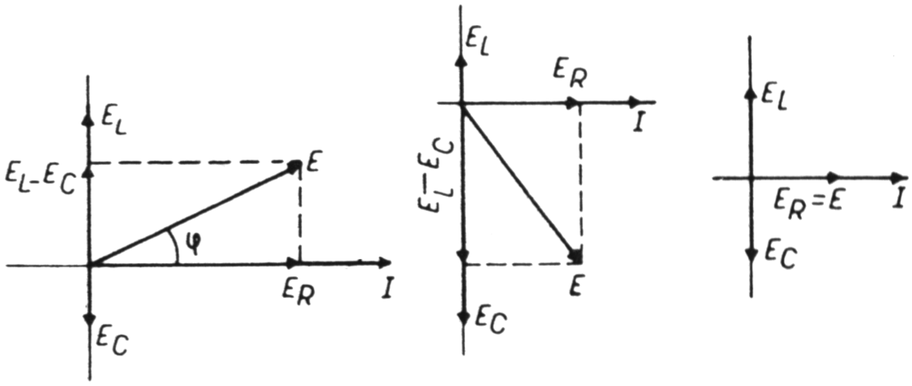

Figura X

No primeiro caso, o circuito comporta-se como circuito indutivo, o segundo como capacitivo e o terceiro como resistivo.

Nesse caso o vetor é representado na forma E = Er + i (El – Ec) = E cos θ + i sen θ .

Números complexos e sinais sinusoidais

Além das formas trigonométrica e binômia, os números complexos podem ser representado em notação exponencial, onde $Z = P\, e^{i\theta}$, sendo P o módulo do complexo e θ o ângulo formado com o eixo de referência (argumento).

Esta propriedade dos complexos é muito utilizada para expressar as funções seno e cosseno em notação exponencial, onde:

$$\cos(x) = \frac{e^{i(x)} + e^{-i(x)}}{2}$$

$$\mathrm{sen}(x) = \frac{e^{i(x)} - e^{-i(x)}}{2i}$$

Assim, podemos representar as exponenciais complexas:

$e^{i(x)} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$

$e^{-i(x)} = \cos(x) - i\,\mathrm{sen}(x)$

Com isso, a resolução de uma equação com funções sinusoidais pode ser efetuada recorrendo a uma função exponencial complexa.

Números complexos e a função de onda

A equação de onda que rege o movimento dos elétrons foi obtida por Schrodinger em 1925. Esta equação é análoga a equação de onda clássica e o que a difere é justamente a aparição explícita do número imaginário i.. Vejamos

$$-\frac{k^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x)\psi(x,t)=ik\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$$

Vemos que essa equação é satisfeita pela função de onda harmônica, que nada mais é que um complexo em sua forma polar:

$$\psi(x,t)=Ae^{i(kx-\omega t)}=A\left[\cos(kx-\omega t)+i\,\mathrm{sen}(kx-\omega t)\right]$$

As funções de onda de Schrodinger não são necessariamente reais, contudo a probabilidade de encontrar um elétron é totalmente real. Para podermos encontrar essa probabilidade, mudaremos a interpretação da equação de onda de modo que ela seja real. Para isso, utilizaremos a propriedade que o complexo possui de, quando multiplicado por seu conjugado, se tornar real. Assim, a probabilidade será dada por:

$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^{*}\psi dx=1$, onde ψ^{*} é o conjugado do complexo ψ

Esta equação é chamada de equação de normalização. Essa condição tem um papel importante na mecânica quântica, pois coloca uma restrição nas soluções da equação de Schrodinger que leva à quantização de energia.

Com os aspectos abordados acima, percebemos que o conjunto de números complexos tem um universo infinito de aplicações, que com a Física Moderna e descobertas recentes está aumentado cada vez mais. A exposição dessas aplicações no ensino médio deve ser feita de maneira simples e superficial, visto que nossos alunos não possuem muitos dos conhecimentos aqui abordados, mas o certo é, que não podemos priva-los desse entendimento.

Atualmente, o ensino da matemática em geral deve procurar trabalhar com exemplos práticos, na vida e em outras disciplinas (trabalhar a interdisciplinaridade), para despertar no aluno à vontade e o desejo de aprender. Com isso, qualquer assunto ou tópico construirá um conhecimento sólido e não superficial e os alunos conseguirão estabelecer relações mais facilmente.

Bibliografia:

CAVALCANTI, P. J. MENDES. Fundamentos da Eletrotécnica, ed. Rio de Janeiro, Freitas Bastos, 1989, 19ª. Edição.

GALI, Dr. FREDERICO RUBIO Y. The Role of Mathematics in the Rise of Science, Ed. Cast.:Alianza Editorial. S. A.,Madrid, 1991.

TIPLER. Física Moderna. Editora Guanabara Dois S.A. Rio de Janeiro, 1981.

NUBILE, Paulo. Por dentro dos números complexos. Revista Nova Eletrônica, fevereiro, 1982.

Números Complexos e Sinais Sinusoidais, http://analog.inesc.pt/smace/cap-11/fasorimp.htm

Página original:

http://hermes.ucs.br/ccet/deme/emsoares/inipes/complexos/